

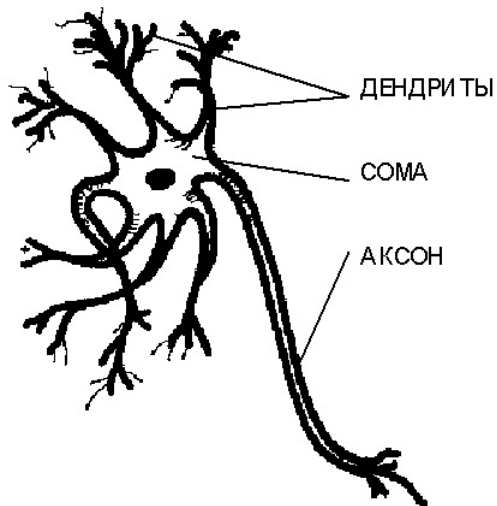
Устойчивость дискретных моделей нейронных сетей с запаздывающими взаимодействиями

Иванов С.А.

Южно-Уральский государственный университет (национальный
исследовательский университет)

Челябинск 2017

Типичный биологический нейрон



Мембранный потенциал нейрона

Уравнение мембранного потенциала $m_j(t)$ для изолированного нейрона с номером j имеет вид

$$\alpha_j \frac{dm_j}{dt} = -m_j(t) + h_j, \quad (1)$$

где h_j равновесный потенциал j -го нейрона, это мембранный потенциал, который устанавливается в отсутствии внешних сигналов, α_j постоянная времени, характеризующая инерционность j -го нейрона.

Уравнение (1) дополняется сигналами других нейронов сети:

$$\alpha_j \frac{dm_j}{dt} = -m_j(t) + h_j + \sum_{v=1}^n w_{jv} m_v(t), \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (2)$$

где w_{jv} весовые коэффициенты (силы действия v -го нейрона на j -й). Поскольку дендриты данного нейрона проводят сигналы только других нейронов, имеем $w_{jj} = 0$.

Дифференциальное уравнение биологической нейронной сети с запаздываниями

Вводим запаздывания τ_{jv} ($1 \leq j, v \leq n$) в (2) и получаем

$$\alpha_j \frac{dm_j}{dt} = -m_j(t) + h_j + \sum_{v=1}^n w_{jv} m_v(t - \tau_{jv}), \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

Вводим традиционные соглашения о равенстве всех запаздываний и показателей инерционности нейронов: $\tau_{j,v} \equiv \tau$, $\alpha_j \equiv \alpha$. Введем матрицу $W = (w_{jv})_{j,v=1}^n$ и векторы $m(t) = (m_1(t), \dots, m_n(t))^T$, $H = (h_1, \dots, h_n)^T$. Тогда система (3) примет вид

$$\alpha \dot{m}(t) = -m(t) + H + W \cdot m(t - \tau). \quad (4)$$

Это линейное неоднородное матричное уравнение с запаздываниями для вектора $m(t)$ мембранных потенциалов нейронов в нейронной сети.

Дифференциальное уравнение нейронной сети в отклонениях от стационарного решения

Рассмотрим стационарное решение $m(t) \equiv m^*$ уравнения (4).
Имеет место равенство $m^* = W \cdot m^* + H$. Введем отклонения $x(t) = m(t) - m^*$. Уравнение (4) в отклонениях примет вид

$$\alpha \dot{x}(t) = -x(t) + W \cdot x(t - \tau). \quad (5)$$

Интерпретация:

$x(t)$ вектор отклонений мембранного потенциала от стационарного состояния в момент t , $t \in \mathbb{R}$,

W матрица сил взаимодействий нейронной сети,

τ запаздывание во взаимодействии нейронов.

Источник:

M. Arbib, editor, The handbook of brain theory and neural networks, MIT Press, 2003.

Дискретизация биологической модели нейронных сетей

Непрерывная модель:

$$\alpha \dot{x}(t) = -x(t) + W \cdot x(t - \tau).$$

Интерпретация:

$t \in \mathbb{R}$ время;

$$x(t) = (x^{(1)}(t), \dots, x^{(n)}(t))^T$$

вектор отклонений мембранных потенциалов от стационарного уровня в момент t ;

α коэффициент демпфирования нейрона;

W матрица сил запаздывающих взаимодействий нейронов;

τ запаздывание.

Источник модели: М. Arbib (1998, 2003)

Дискретная модель:

$$x_s = \gamma x_{s-1} + B x_{s-k}.$$

Интерпретация:

$s \in \mathbb{N}$ время;

$$x_s = (x_s^{(1)}, \dots, x_s^{(n)})^T$$

вектор отклонений мембранных потенциалов от стационарного уровня в момент s ;

γ коэффициент демпфирования нейрона;

B матрица сил запаздывающих взаимодействий нейронов;

k запаздывание.

Источник модели: Е. Kaslik (2007, 2009)

Усложнение дискретной модели биологической нейронной сети

В дискретной модели

$$x_s = \gamma x_{s-1} + B x_{s-k}, \quad s = 1, 2, \dots$$

запаздывание k во взаимодействии различных нейронов кратно запаздыванию в демпфировании собственных колебаний нейронов, равному 1.

Наши методы изучения устойчивости разностных уравнений достаточно мощны, чтобы учесть возможность, когда запаздывание k во взаимодействии различных нейронов не кратно запаздыванию в демпфировании собственных колебаний нейронов. Поэтому мы введем натуральное число m , такое что $1 \leq m \leq k$, и будем изучать уравнение с двумя запаздываниями

$$x_s = \gamma x_{s-m} + B x_{s-k}, \quad s = 1, 2, \dots \quad (6)$$

Натуральное число m будем называть запаздыванием в демпфировании собственных колебаний нейрона.

Нейронные сети и реальный мир

Всякую модель, в которой имеются узлы и связи между ними, можно рассматривать как нейронную сеть.

Модели землетрясений — нейронная сеть

Baiesi M., Paczuski M., Scale-free networks of earthquakes and aftershocks, Physical Review E (2004) V. 69, 907–908.

Мультикомпьютер — нейронная сеть

Howlett R.J., Walters S.D., Multi-computer neural network architecture, Electronics Letters, 1999, V. 35(6), 1350–1352

Модель извлечения слов из памяти — нейронная сеть

Гопыч, П. М., Трехэтапная количественная нейросетевая модель явления "на кончике языка", IX-й Международная конф. "Знание-диалог-решение"(KDS-2001) — С. 158–165.

Нервные системы живых существ — нейронная сеть

Определение нейронной сети

Нейронная сеть – упорядоченная пятерка объектов

$$\mathcal{A} = (\gamma, k, m, n, B),$$

где $\gamma \in \mathbb{R}$, $k, m \in \mathbb{Z}_+$ ($k \geq m$), $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Диагональные элементы матрицы B равны нулю.

γ – коэффициент демпфирования собственных колебаний нейрона, $\gamma \in (-1; 1)$.

k – запаздывание во взаимодействии нейронов.

m – запаздывание в демпфировании собственных колебаний нейронов, $m \leq k$.

n – количество нейронов в сети.

B – матрица взаимодействий, запаздывающих на k тактов.

b_{vj} – сила воздействия j -го нейрона на v -й.

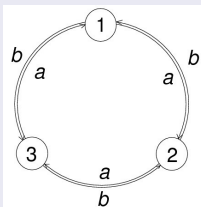
Уравнение сети $\mathcal{A}$:

$$x_s = \gamma x_{s-m} + B x_{s-k}, \quad s = 1, 2, \dots$$

Граф нейронной сети

Графом нейронной сети $\mathcal{A} = (\gamma, k, m, n, B)$ назовем взвешенный направленный граф (V, E) с множеством вершин $V = \{1, 2, \dots, n\}$ и множеством дуг E , определенным следующим образом: $(j, v) \in E$, если и только если $\beta_{jv} \neq 0$ в матрице $B = (\beta_{jv})_{j,v=1}^n$.

В случае $\beta_{jv} \neq 0$ вес дуги (j, v) есть β_{jv} .



$$B = \begin{pmatrix} 0 & b & a \\ a & 0 & b \\ b & a & 0 \end{pmatrix}$$

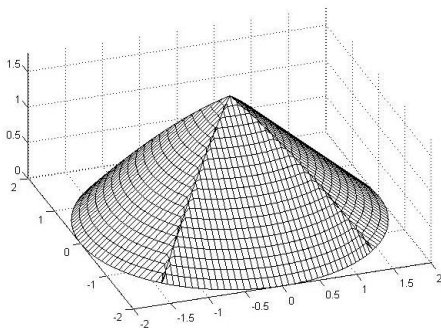
Граф кольцевой нейронной сети $\mathcal{C}_3(a, b) = (\gamma, k, m, 3, C_3(a, b))$.
 a — сила действия нейрона на соседний нейрон по часовой стрелке, b — сила обратного действия.

Мы рассматриваем матричное разностное уравнение

$$x_s = Ax_{s-m} + Bx_{s-k}, \quad s = 1, 2, \dots$$

Здесь $x : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$; $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, натуральные числа k, m — запаздывания ($k \geq m$).

Мы называем данное уравнение (асимптотически) устойчивым, если для любого его решения (x_s) последовательность $(|x_s|)$ ограничена ($\lim_{s \rightarrow \infty} |x_s| = 0$).



Конус устойчивости для $k = 5$, $m = 4$

Пусть $k > m \geq 1$ и числа k, m взаимно просты. Пусть $A, B, S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и $S^{-1}AS = A_T$ и $S^{-1}BS = B_T$, где A_T и B_T — нижние треугольные матрицы с элементами a_{js}, b_{js} ($1 \leq j, s \leq n$). Построим точки $M_j = (u_{1j}, u_{2j}, u_{3j}) \in \mathbb{R}^3$, ($1 \leq j \leq l$), такие что

$$u_{1j} + iu_{2j} = b_{jj} \exp(-i \frac{k}{m} \arg a_{jj}), \quad u_{3j} = |a_{jj}|.$$

Тогда уравнение $x_s = Ax_{s-m} + Bx_{s-k}$ асимптотически устойчиво если и только если все точки M_j ($1 \leq j \leq n$) находятся внутри конуса устойчивости для данных k, m . Если существует j ($1 \leq j \leq n$), такое что M_j расположено вне конуса устойчивости, то уравнение $x_s = Ax_{s-m} + Bx_{s-k}$ неустойчиво.

Програмный продукт «Устойчивость матричных разностных уравнений с двумя запаздываниями»

Введите размерность системы

5

Введите запаздывания системы k и m

2

1

Введите параметр rho

1

Ввод

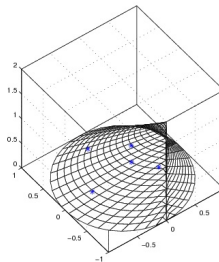
Устойчива ли система? Ответ: Система устойчива

Введите собственные числа матриц A и B

	A	B
1	0.3000 + ...	0.2000 ...
2	0.0000 + ...	0.1000 ...
3	0.1000 - ...	0.5000 ...
4	0.5000 + ...	-0.2000 ...
5	0.4000 - ...	0.0000 ...

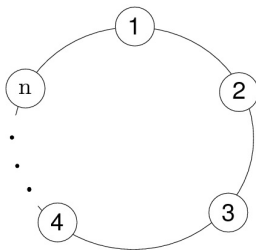
Очистить

Рассчитать



Программа «Устойчивость разностных матричных уравнений с запаздываниями» для диагностирования устойчивости матричных разностных уравнений $x_s = Ax_{s-m} + Bx_{s-k}$.

Кольцевая нейронная сеть



Нейронная сеть $C_n(a, b) = (\gamma, k, m, n, C_n(a, b))$ с кольцевой конфигурацией нейронов описывается системой разностных уравнений

$$x_s = \gamma x_{s-m} + C_n(a, b) x_{s-k}, \quad s = 1, 2, \dots$$

где x_s вектор состояния сети в момент $s = 1, 2, \dots, l$ единичная $n \times n$ матрица, γ коэффициент демпфирования собственных колебаний нейрона ($|\gamma| < 1$), $m \in \mathbb{Z}_+$ запаздывание в демпфировании.

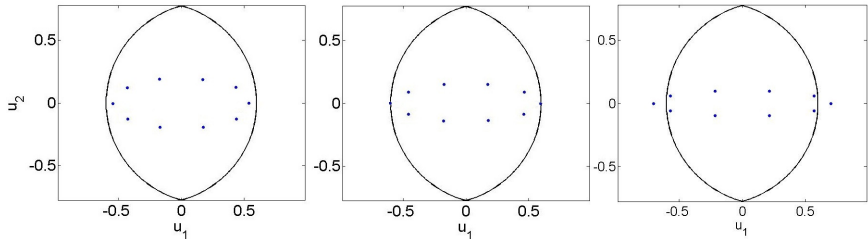
Циркулянтная матрица взаимодействий кольцевой нейронной сети

Матрица $C_n(a, b)$ взаимодействий нейронов, запаздывающих на k тактов, имеет вид

$$C_n(a, b) = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 & \dots & 0 & a \\ a & 0 & b & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b \\ b & 0 & 0 & \dots & a & 0 \end{pmatrix}.$$

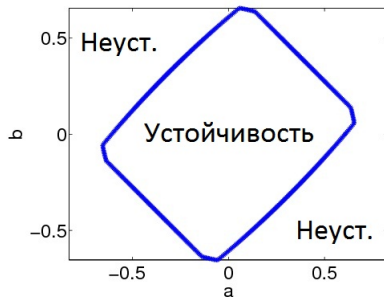
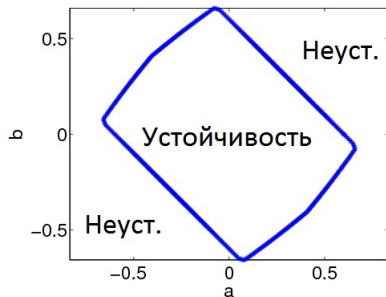
Здесь a – сила воздействия нейрона на соседний нейрон по часовой стрелке, b – сила обратного воздействия ($a, b \in \mathbb{R}$).

Проверка устойчивости кольцевых нейронных сетей



Точки M_j ($1 \leq j \leq 10$) и сечение конуса устойчивости для $k = 3$, $m = 2$ на уровне $\gamma = 0.4$. (а) сеть устойчива, (б) сеть на границе устойчивости, (с) сеть неустойчива.

Области устойчивости кольцевых нейронных сетей



Области устойчивости в плоскости (a, b) для кольцевой системы для $n = 10$, $k = 3$, $m = 2$, (a) $\gamma = 0.4$, (b) $\gamma = -0.4$.

Линейная конфигурация нейронов



Линейная конфигурация n нейронов

$\mathcal{L}_n(a, b) = (\gamma, k, m, n, L_n(a, b))$ описывается системой

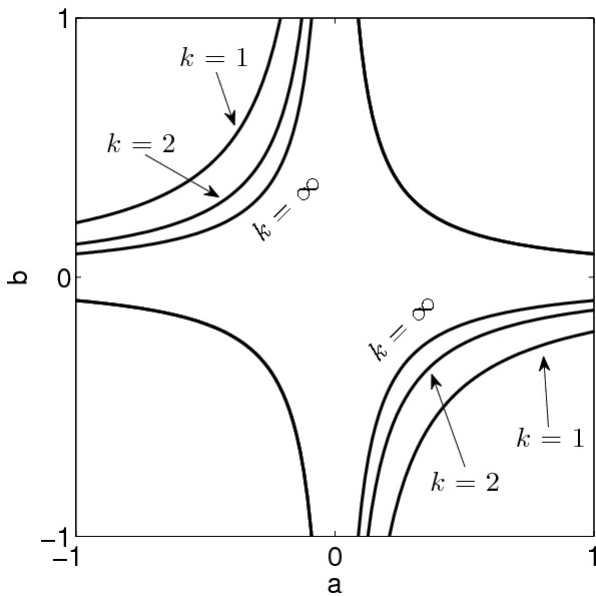
$$x_s = \gamma x_{s-m} + L_n(a, b) x_{s-k}, \quad s = 1, 2, \dots$$

где $L_n(a, b)$ матрица сил запаздывающих взаимодействий нейронов:

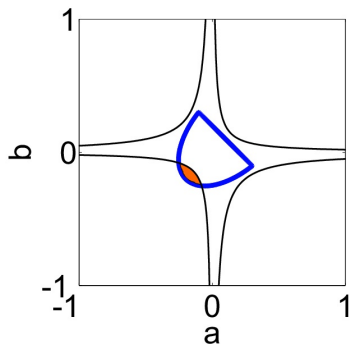
$$L_n(a, b) = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a & 0 & b & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь a – сила воздействия нейрона на правого соседа, b – сила обратного воздействия.

Области устойчивости линейных нейронных сетей



Парадоксальные точки



Определение

Назовем точку (a, b) парадоксальной в кольцевой сети при данных k, m, γ , если кольцевая сеть при данных k, m, γ, a, b асимптотически устойчива, а линейная при тех же k, m, γ, a, b неустойчива.

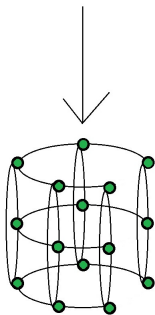
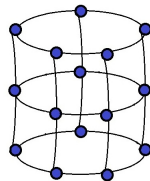
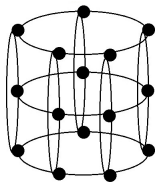
Красная область - область парадоксальных точек.

Теорема

Пусть $m = 1$.

1. Если n делится на 4, то парадоксальные точки в кольцевой сети не существуют ни при каких $k > 1$, γ .
2. Если n чётно, но не делится на 4, то парадоксальные точки в кольцевой сети существуют при любых k , γ , таких что $k > 1$, $|\gamma| < 1$.
3. Если n нечётно, то для любого запаздывания $k > 1$ найдётся $\gamma_0 \in (0; 1)$, такое что для любого γ , удовлетворяющего условию $\gamma_0 < |\gamma| < 1$, парадоксальные точки в кольцевой сети существуют.
4. Если n нечётно, то для любого запаздывания $k > 1$ найдётся $\gamma_1 \in (0; 1)$, такое что для любого γ , удовлетворяющего условию $0 \leq |\gamma| < \gamma_1$, парадоксальные точки в кольцевой сети не существуют.

Изменения в областях устойчивости в процессе разрыва колец нейронных сетей

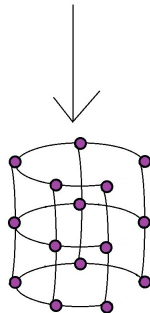
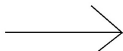


$$C_3(a, b) \square C_5(a, b) \xrightarrow{1} \mathcal{L}_3(a, b) \square C_5(a, b)$$

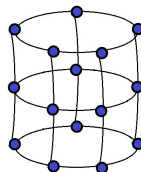
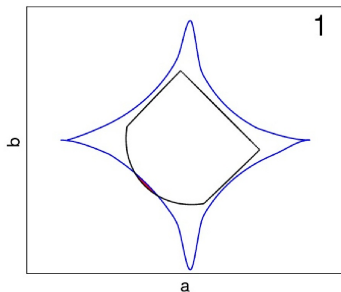
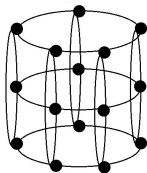
$$2 \downarrow$$

$$3 \downarrow$$

$$C_3(a, b) \square \mathcal{L}_5(a, b) \xrightarrow{4} \mathcal{L}_3(a, b) \square \mathcal{L}_5(a, b)$$

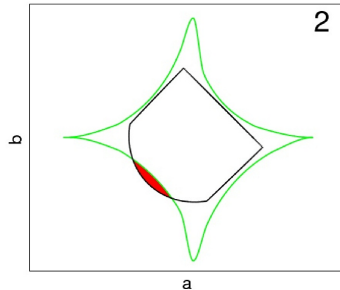
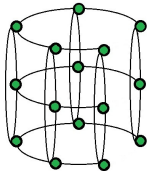
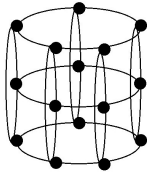


Парадоксальные точки в малых кольцах нейронных сетей



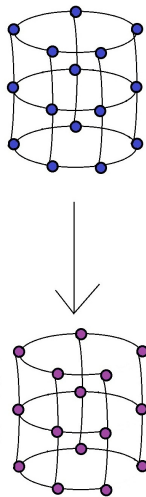
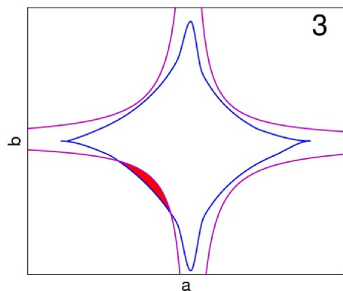
Красным показаны парадоксальные точки.

Парадоксальные точки в малых кольцах нейронных сетей



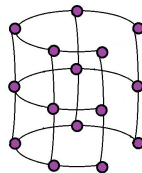
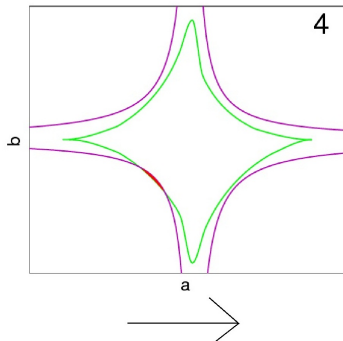
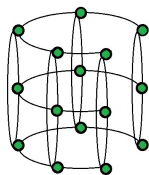
Красным показаны парадоксальные точки.

Парадоксальные точки в малых кольцах нейронных сетей



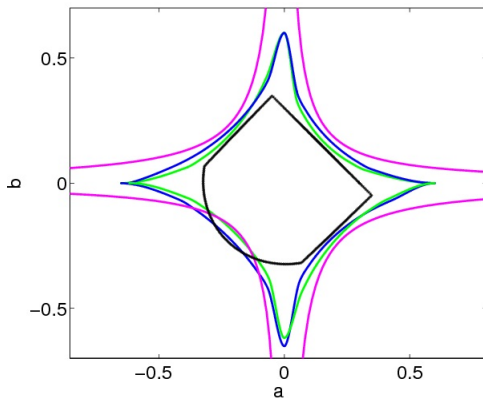
Красным показаны парадоксальные точки.

Парадоксальные точки в малых кольцах нейронных сетей



Красным показаны парадоксальные точки.

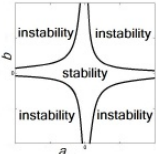
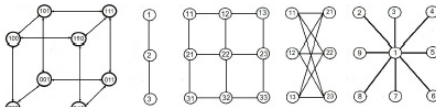
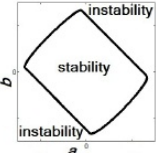
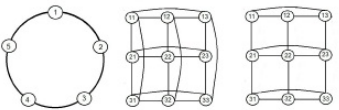
Парадоксальные точки в малых кольцах нейронных сетей



Границы областей устойчивости в плоскости ab для четырех сетей: $C_3(a, b) \square C_5(a, b)$ (черный цвет), $\mathcal{L}_3(a, b) \square C_5(a, b)$ (синий), $C_3(a, b) \square \mathcal{L}_5(a, b)$ (зеленый), $\mathcal{L}_3(a, b) \square \mathcal{L}_5(a, b)$ (фиолетовый).

The classification of neural networks

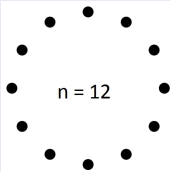
Standart network configurations are divided into two groups

No	The shape of the stability domain	The standard configurations
1		 HYPERCUBE LINE GRID TWO-LAYER STAR
2		 RING TORUS CYLINDER

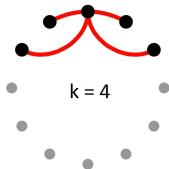
If $a = 0$ or $b = 0$, i.e. if the action of neuron to its neighbors is unidirectional, then the stability guaranteed to the first group of networks. This is not case for the second group of networks.

Small world networks

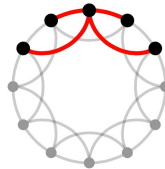
The algorithm for constructing small world networks



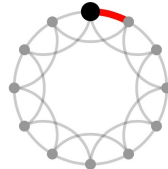
a)



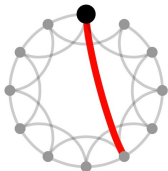
b)



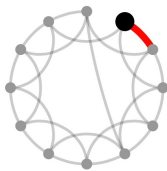
c)



d)



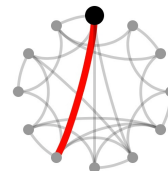
e)



f)

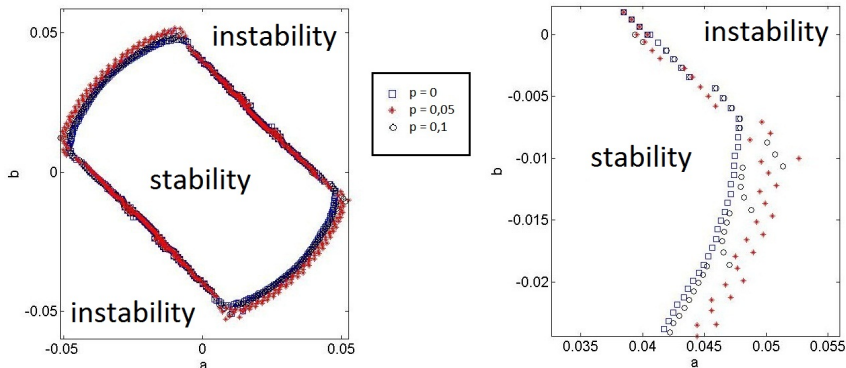


g)



h)

The domain of stability of small world networks



Network settings: $n = 1500$, $k = 30$, $m = 3$, $r = 2$, $\gamma = 0,4$.

Длина кратчайшего пути в среднем L

$$L = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i,j \in n, i \neq j} d_{ij},$$

где n - число нейронов в сети, d_{ij} - расстояние от узла i до узла j .

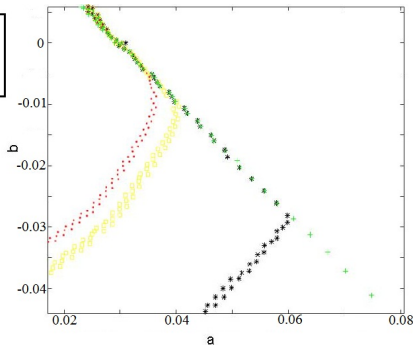
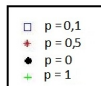
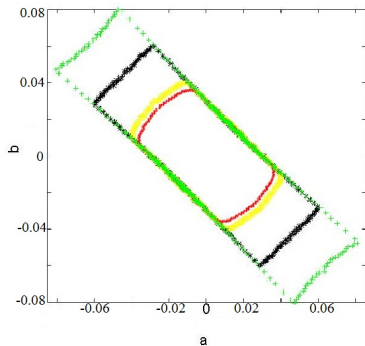
Коэффициент кластеризации C

Предположим что вершина v имеет k_v соседей. Тогда число ребер между ними меньше или равно $\frac{k_v(k_v-1)}{2}$, равенство достигается, когда все соседи вершины v соединены между собой. Обозначим как C_v число ребер, которые реально существуют из возможных между соседями, т.е. коэффициент кластеризации для вершины равен отношению числа реально существующих ребер между ее соседями к числу всех возможных ребер между ними и вычисляется по формуле

$$C = \frac{2C_v}{k_v(k_v - 1)}.$$

Тогда общий коэффициент кластеризации определим как среднее между коэффициентами кластеризации всех вершин.

The domain of stability of small world networks



Network settings: $n = 400$, $k = 40$, $m = 3$, $r = 2$, $\gamma = 0,4$.

- Ivanov S., Kipnis M. On the stability of a neural network with links based on the Watts-Strogatz model // International Journal of Pure and Applied Mathematics. 2015. V. 105, No. 3. P. 431 - 438.
- Ivanov S.A. Calculation of Stability Domains of Discrete Models of Big Size Small World Networks. Bulletin of the South Ural State University. Series: Computational Mathematics and Software Engineering. 2016. vol. 5, no. 3. pp. 69–75. (in Russian)
- Project "Research the stability of the large discrete-time small world neural networks" by supported grant of Russian Foundation for Basic Research № 16-31-00343.

Спасибо за внимание